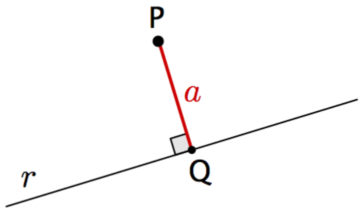
Lugares Geométricos I

Eduardo Wagner – IMPA

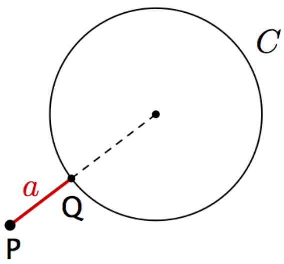
1. Distâncias

A palavra *distância* aparece no início da construção da geometria quando dizemos que a distância entre dois pontos A e B é o comprimento do segmento AB. Neste texto, se o comprimento de um segmento AB em certa unidade é "a" escrevemos $d(A,B) = a$ ou simplesmente, $AB = a$.

A distância de um ponto a uma reta também aparece logo depois. A distância de um ponto P a uma reta r é o comprimento do segmento PQ, perpendicular a r no ponto Q.

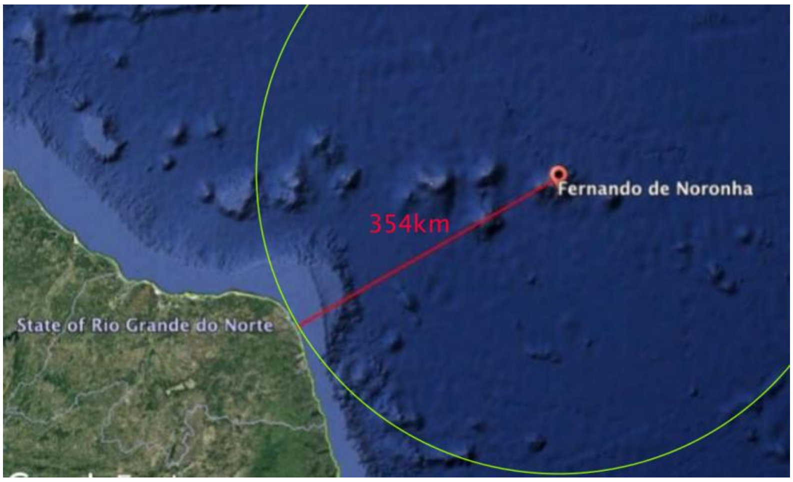


Vamos agora ampliar o conceito de distância. Uma experiência interessante é a de desenhar no quadro (lousa) da sala uma circunferência C e um ponto P exterior e perguntar a um aluno qual seria a distância do ponto à circunferência. Com alta probabilidade, o aluno faria o desenho abaixo.



Se o segmento que liga P ao centro da circunferência corta a circunferência em Q, então a distância de P à circunferência é o comprimento do segmento PQ. Se $PQ = a$, escrevemos $d(P,C) = a$. Dessa forma, na figura acima, Q é o ponto da circunferência mais próximo de P.

A mesma ideia aparece também em outros lugares. Em geografia, por exemplo, podemos perguntar qual é a distância da ilha de Fernando de Noronha à costa brasileira.
Com um mapa de escala conhecida, traçamos circunferências com centro no lugar mais a oeste da ilha e raios cada vez maiores. Quando a circunferência "tocar" a costa brasileira, medimos a distância do centro ao ponto de contato, e essa é a distância procurada. O raio dessa circunferência aplicado à escala do mapa fornece a distância procurada.
A imagem do que calculamos está na figura a seguir.



Distância de um ponto a um conjunto (de pontos)

Com o que vimos antes, a definição que se segue será bastante natural.

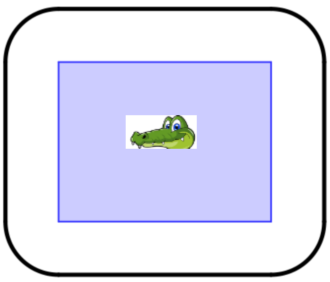
Definição
Seja P um ponto fixo e C um conjunto de pontos. A distância de P a C é o menor comprimento de um segmento PQ quando Q percorre o conjunto C. Em símbolos,

$$d(P, C) = \min\{PQ;\ Q \in C\}$$

Essa definição pode motivar problemas interessantes e intrigantes como o a seguir.

Problema
Em um zoológico há um tanque retangular de 20m de comprimento e 15m de largura onde habitam vários jacarés. A direção do zoológico determinou que, por segurança, nenhuma pessoa possa chegar a menos de 3m do tanque e, para isso, mandou construir uma cerca com essa finalidade. Qual é o comprimento (aproximado) da cerca?

Solução
O tanque tem a forma de um retângulo com medidas dadas. Precisamos, então, pensar no conjunto de todos os pontos que distam 5m do retângulo. De acordo com a definição dada, a cerca deve ter a forma da figura ao lado.
Observe que o comprimento da cerca é igual ao perímetro do retângulo mais o comprimento de uma circunferência de 3m de raio.



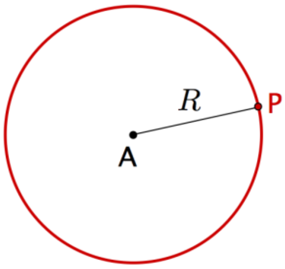
2. Lugares geométricos básicos

Lugar geométrico nada mais é do que um conjunto de pontos e, como todo conjunto, ele deve estar bem definido. Se um ponto P possui uma propriedade p podemos imaginar o conjunto de todas as posições que P pode assumir. O conjunto de todos os pontos (do plano ou do espaço) que possuem a propriedade p é chamado de *Lugar Geométrico da propriedade* p. Neste texto vamos abordar apenas lugares geométricos no plano, começando com os mais conhecidos.

2.1 – A circunferência

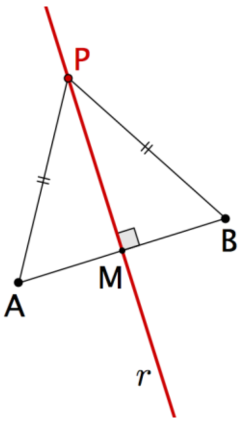
Antigamente dizia-se que uma circunferência é "o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixo chamado centro". Essa "definição" não é realmente uma definição, pois dado um ponto no plano não se pode saber se ele pertence, ou não, a essa figura que foi chamada de circunferência. O inconveniente verbo equidistar obriga que, para determinar se um dado ponto pertence a uma circunferência é preciso conhecer um outro ponto que pertence a ela.

Jogue fora essa definição. A definição correta é:

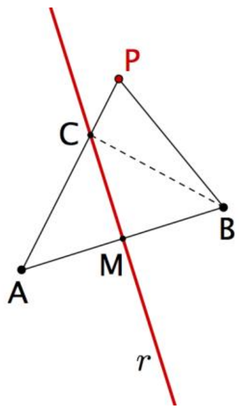


Dados, um ponto A e um segmento R, a *circunferência de centro A e raio R é o lugar geométrico dos pontos P que distam R de A.*

2.2 – A mediatriz de um segmento



A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular a esse segmento que passa pelo seu ponto médio. Sabemos que todo ponto P da mediatriz de um segmento AB equidista de A e de B. De fato, observando a figura ao lado, os triângulos PMA e PMB são congruentes (caso LAL) e, portanto, $PA = PB$. Entretanto, provar que todo ponto P da mediatriz do segmento AB é suficiente para garantir que essa reta chamada mediatriz de AB seja um lugar geométrico? A rigor ainda não. Seria necessário demonstrar que na mediatriz do segmento AB estão <u>todos</u> os pontos que equidistam de A e de B e, para isso, deveríamos demonstrar que se um ponto P não pertence à mediatriz do segmento AB então ele não tem mesma distância a A e a B. Vamos então fazer isso.



Considere, na figura ao lado, que a reta r é a mediatriz do segmento AB e que o ponto P está no semiplano da reta r que contém B. Dessa forma, o segmento PA corta a mediatriz r em um ponto Ce, no argumento que se segue, vamos utilizar a *desigualdade triangular*.

Observe que, como C está na mediatriz, então ele equidista de A e de B. Logo,

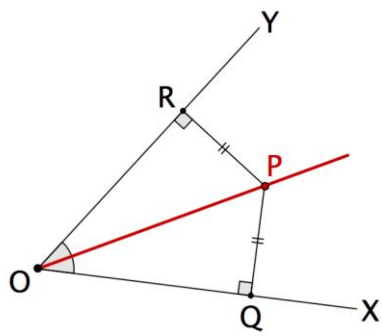
$$PB < PC + CB = PC + CA = PA$$

Demonstramos um fato bastante intuitivo: se P está no semiplano que contém B então ele está mais próximo de B do que de A. Naturalmente que, no outro semiplano o argumento é o mesmo.

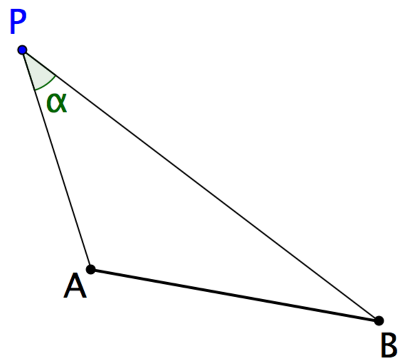
Podemos então dizer que a *mediatriz do segmento* AB *é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de* A *e de* B.

2.3 – A bissetriz de um ângulo

Ângulo não é uma figura fácil. Em livros de geometria é comum encontrarmos definições diferentes para o ângulo. Adotaremos aqui a definição simples e tradicional: *ângulo é a figura formada por duas semirretas de mesma origem*. Com essa definição a forma mais adequada para definir sua bissetriz é justamente a que a caracteriza como um lugar geométrico. Dizemos então que a *bissetriz do ângulo* XOY *é o lugar geométrico dos pontos que equidistam das semirretas* OX *e* OY.

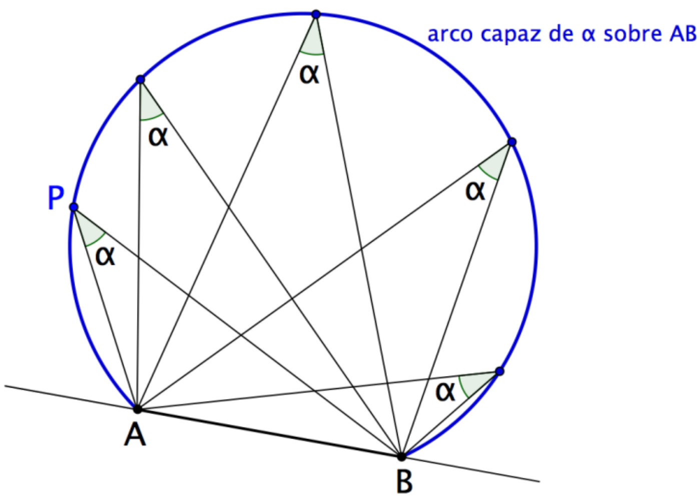


2.4 – O arco capaz



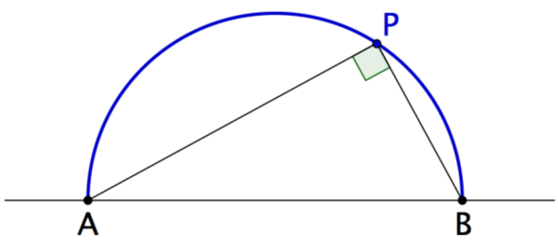
A noção de arco capaz está ligada ao conceito "ângulo de visão". Dados um segmento AB e um ponto P, medimos o ângulo $APB = \alpha$. Esse é o ângulo de visão do segmento AB a partir do ponto P. Dizemos que o ponto P "vê" o segmento AB segundo um ângulo α.

Imagine agora que o ponto P esteja sempre em um mesmo semiplano determinado pela reta AB e que, dado o ângulo α, consideremos o conjunto de todas as posições de P tais que $\angle APB = \alpha$. Esse conjunto de pontos é chamado de *lugar geométrico do ângulo* α *construído sobre o segmento* AB. Dizemos ainda que todo ponto desse lugar geométrico é *capaz* de ver o segmento AB sob ângulo α.



A justificativa é simples. Considerando na figura acima a circunferência que passa por A, B e P cada ângulo inscrito em um dos arcos AB é constante, pois sua medida é igual à metade do arco AB oposto.

Um caso particular muito importante é o da semicircunferência de diâmetro AB. Essa semicircunferência é o lugar geométrico do ângulo de 90° construído sobre AB. Na figura ao lado, $\angle APB = 90°$ para qualquer posição de P sobre a semicircunferência de diâmetro AB.



2.4.1 – Construção do arco capaz

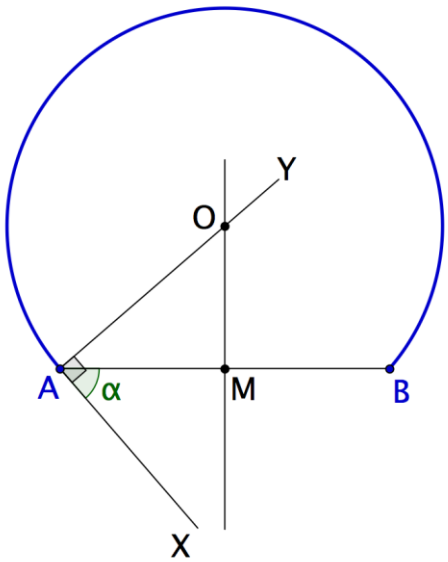
Suponha que sejam dados um segmento AB e um ângulo α. Para construir o arco capaz do ângulo α sobre o segmento AB fazemos o seguinte;

1) traçamos a mediatriz de AB.

2) no semiplano de AB oposto ao do arco capaz desejado, traçamos a semirreta AX com $\angle XAB = \alpha$.

3) traçamos a semirreta AY perpendicular a AX.

4) a interseção de AY com a mediatriz de AB é o centro do arco capaz.



Para justificar, observe que $\angle AOM = \alpha$ e, portanto, $\angle AOB = 2\alpha$. Assim, o arco AB no semiplano oposto ao do arco capaz mede 2α e, consequentemente, para todo ponto P no arco AB azul da figura acima, tem-se

$$\angle APB = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

Exemplo

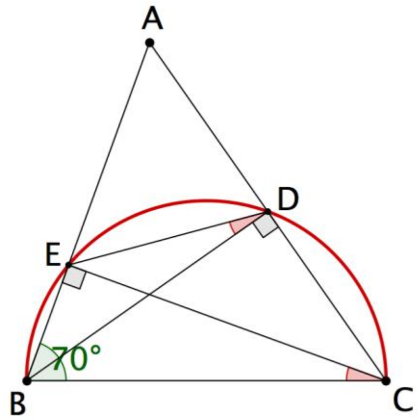
No triângulo ABC o ângulo de vértice B mede $70°$. São traçadas as alturas BD e CE. Quanto mede o ângulo BDE?

Solução

Observe o desenho da figura ao lado.

Como $\angle BDC = \angle BEC = 90°$ então os pontos D e E pertencem ao arco capaz de $90°$ construído sobre BC.

Assim, $\angle BDE = \angle BCE = 90° - 70° = 20°$.



Exemplo

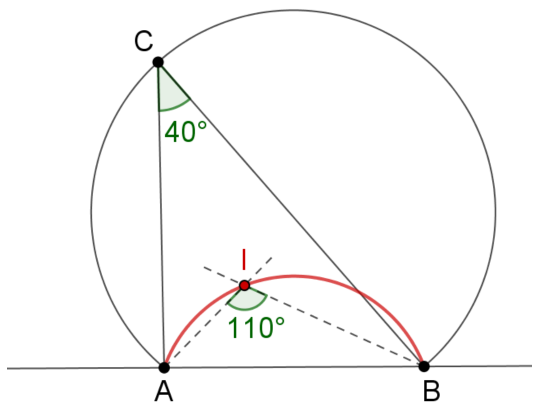
No triângulo ABC os vértices A e B são fixos e o ângulo de vértice C mede $40°$. Considerando C de um mesmo lado da reta AB determine o lugar geométrico do encentro do triângulo ABC.

Solução

O incentro de um triângulo é o ponto de interseção das bissetrizes internas. Traçamos, então, as bissetrizes dos ângulos de vértices A e B do nosso triângulo cuja interseção é o seu incentro I. Consideremos os ângulos: $\angle IAB = \angle IAC = x$ e $\angle IBA = \angle IBC = y$. No triângulo ABC temos $2x + 2y + 40° = 180°$, o que fornece $x + y = 70°$, Portanto, no triângulo IAB, concluímos que $\angle AIB = 110°$.

Dessa forma, como os pontos A e B são fixos e o ângulo AIB é constante, concluímos que o lugar geométrico do ponto I é o arco capaz de $110°$ sobre AB.

A figura ao lado mostra do lugar geométrico do incentro do triângulo ABC.



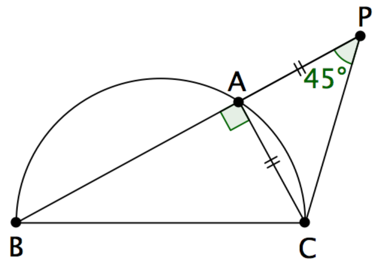
2.5 – Observando os limites do LG

Frequentemente concluímos que o lugar geométrico de determinado ponto está contido em determinada figura; uma reta, uma circunferência, ou um arco capaz pelo que vimos até aqui. O fato de que o LG procurado esteja contido em determinada figura não significa, evidentemente, que ele seja toda a figura encontrada. Devemos então pesquisar os limites do LG observando o que ocorre quando o ponto móvel se aproxima das extremidades do seu domínio. Faremos isso nos próximos exemplos.

Exemplo

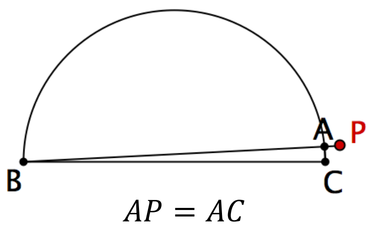
No triângulo ABC o lado BC é fixo e o vértice A percorre a semicircunferência de diâmetro BC. Prolongue o segmento BA de um comprimento $AP = AC$. Determine o lugar geométrico do ponto P.

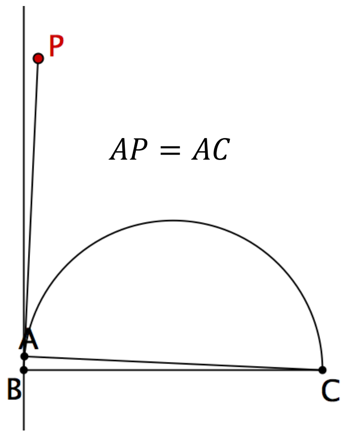
Solução



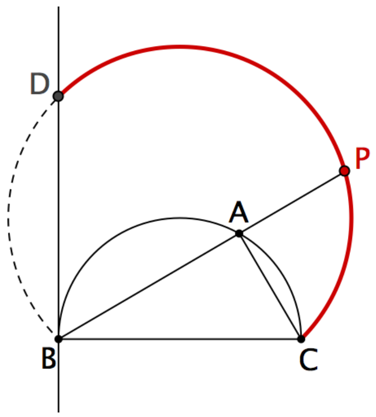
Se o vértice A percorre a semicircunferência de diâmetro BC então o ângulo BAC é reto. Assim, no triângulo ACP, como $AP = AC$, temos $\angle APC = 45°$. Se B e C são fixos e $\angle BPC = 45°$ deveríamos responder que o lugar geométrico do ponto P é o arco capaz de 45° construído sobre BC. É quase, mas não é bem isso. O correto é dizer que o LG do ponto P *está contido* no arco capaz de 45° construído sobre BC. Não se pode afirmar, de imediato, que o arco capaz seja o LG. Devemos observar o que ocorre nas extremidades do lugar geométrico do vértice A.

Quando A se aproxima de C então ponto P também se aproxima de C. Percebemos então que o ponto P pertence ao arco capaz de 45° construído sobre BC e uma das extremidades do LC é o ponto C.





Por outro lado, quando A se aproxima de B percebemos que o ponto P, que pertence ao arco capaz de 45° construído sobre BC, se aproxima da reta que passa por B e é perpendicular a BC como mostra a figura ao lado.



Assim concluímos que o lugar geométrico do ponto P é a parte do arco capaz de 45° construído sobre BC limitado pelo ponto C e pela reta perpendicular a BC passando por B.

A figura deste LG está ao lado.

Fim da primeira parte